1.1.10 Rovnice, vyjadřování

Předpoklady: 010109

Pedagogická poznámka: Průběh hodiny je třeba řídit tak, aby i ti nejpomalejší žáci dospěli alespoň k příkladu 9.

Lineární rovnice ($2(x-1)+3=3x-2(x-3)$), vzorce ($s=vt$) před nás staví stejný problém: získat z rovnosti vztah pro jednu z vystupujících veličin.

K čemu je vyjadřování dobré?

- U rovnic tak získáme výsledek, u vzorců a vztahů získáme tvar, do kterého můžeme dosadit a jediným výpočtem na kalkulačce určit výsledek (ušetříme tak zapisování mezivýsledků).
- Můžeme odhadnout, zda je výsledek správný (nebo rozumný).
- Můžeme odhadnout, jak se výsledek mění v závislosti na veličinách, které vztah obsahuje.
- ...

Jak získat ze vzorce $s=vt$ vztah pro rychlost *v* (vztah $v=...$)?

Klasický postup: $s=vt \Rightarrow \frac{s}{t}=v$ ("převedli jsme *t* na druhou stranu").
Co znamená "převedeme" na druhou stranu, proč *t*, které bylo „nahoře“, je najednou „dole“?

Poznámka: Pokud si dokážete zodpovědět na předchozí otázky, není další vysvětlování nutné.

Co znamená zápis $s=vt$?
Písmenka *s*¸ *v*, *t* označují fyzikální veličiny (dráhu, rychlost, čas), za které dosazujeme čísla $\Rightarrow$ ve skutečnosti jde o rovnost $\check{c}\acute{\imath}slo1=\check{c}\acute{\imath}slo2\cdot\check{c}\acute{\imath}slo3$ $\Rightarrow$ pokud má rovnost platit, musí být na obou stranách stejné číslo (v našem konkrétním případě zapsané vlevo rovnou a vpravo jako součin) $\Rightarrow$ pokud se rovnost má zachovat, musíme s oběma stranami udělat to samé.

- Jak poznáme, co máme s rovností $s=vt$ udělat, abychom získali vztah $v=...$?
  Záleží na konkrétní situaci, neexistuje obecný návod. V našem případě $s=vt$ nám překáží číslo *t*, kterým se násobí *v*.
- Jak se zbavíme ve výrazu vt vynásobení číslem *t*?
  Můžeme výraz vt číslem *t* vydělit $\Rightarrow \frac{vt}{t}=v=\frac{s}{t}$.
- Proč se *t* objevilo na druhé straně (a navíc ve jmenovateli)?
  S oběma stranami rovnosti musíme provést to samé $\Rightarrow$
  $s=vt \quad /:t$ (dělíme, abychom se zbavili nechtěného *t*)
  $\frac{s}{t}=\frac{vt}{t}$ (s oběma stranami musíme provést to samé)

$$\frac{s}{t}=\frac{v\cancel{t}}{\cancel{t}}$$ (na pravé se *t* krátí, jak jsme chtěli)

$$\frac{s}{t}=v$$ (výsledek)

Při vyjadřování se postupně zbavujeme čísel (neznámých, veličin), které nám překážejí. S oběma stranami vždy provádíme to samé (stejnou úpravu), kterou volíme pokaždé podle konkrétní situace.

Pedagogická poznámka: Právě nutnost samostatně si zvolit úpravu některým žákům vadí. Chtějí mít nalinkované, jakým způsobem se příklad řeší, a tuto cestu se rádi naučí nazpaměť. Je nutné jim neustupovat, protože ve skutečnosti je jedním z hlavních cílů matematiky právě nácvik logického rozhodování.

Př. 1: Ze vzorce pro hustotu $\rho=\frac{m}{V}$ vyjádři hmotnost *m*.

$\rho=\frac{m}{V} \quad /\cdot V$ (*V* ve jmenovateli odstraníme tím, že zlomek vynásobíme, aby bylo s čím zkrátit)

$$\rho\cdot V=\frac{m}{V}\cdot V$$

$$\rho\cdot V=m$$

Pedagogická poznámka: Některým žákům přijde zápis zbytečně rozvleklý. Nenutím je, aby psali všechno, v případě, že udělají chybu, která může pramenit ze zkráceného zápisu, chci jako první krok k nalezení chyby zápis doplnit.

Př. 2: Ze vzorce pro $v-v_0=at$ vyjádři konečnou rychlost *v*.

$$v-v_0=at \quad /+v_0$$

$$v-v_0+v_0=at+v_0$$

$$v=v_0+at$$

Pedagogická poznámka: Určitě se objeví někdo, kdo bude rovnici automaticky dělit nebo násobit.

V dalších příkladech zkrátíme zápis a vynecháme řádek s úpravou na obou stranách (například v druhém příkladu $v-v_0+v_0=at+v_0$).

Př. 3: Ze vzorce $s=s_0+vt$ vyjádři počáteční dráhu s_0.

$$s=s_0+vt \quad /-vt$$

$$s-vt=s_0$$

Pedagogická poznámka: U některých žáků se vyskytne problém s vnímáním součinu vt jako jednoho nechtěného čísla. Ještě častější je tento problém u následujícího příkladu.

Př. 4: Ze vzorce pro objem kvádru $V = abc$ vyjádři:
a) délku hrany *a*, b) délku hrany *b*.

a) délka hrany *a*
$V = abc \qquad / : bc$ (součin bc je také číslo, můžeme s ním tedy zacházet jako s jedním číslem a rovnici vydělit najednou)
$$\frac{V}{bc} = a$$

b) délka hrany *b*
$V = abc \qquad / : ac$ (násobení je komutativní $\Rightarrow$ na pořadí členů v součinu nezáleží)
$$\frac{V}{ac} = b$$

Pedagogická poznámka: Z toho, do jaké míry se zdají body předchozího příkladu žákům rozdílné, získáte představu o tom, jak jsou na tom s komutativností násobení.

Př. 5: Z následujících rovnic vyjádři neznámou *x*.
a) $\frac{x}{1,2} = \frac{15}{42}$ b) $x - 2 = 3 + \pi$ c) $x\sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}$
d) $x \cdot 2,3 = 7,1 \cdot 15$ e) $2x - 1 = 3$

a) $\frac{x}{1,2} = \frac{15}{42} \qquad / \cdot 1,2$
$$x = \frac{15}{42} \cdot 1,2$$

b) $x - 2 = 3 + \pi \qquad / +2$
$$x = 5 + \pi$$

c) $x\sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} \qquad / : \sqrt{2}$
$$x = \frac{3 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} - 1$$

d) $x \cdot 2,3 = 7,1 \cdot 15 \qquad / : 2,3$
$$x = \frac{7,1 \cdot 15}{2,3}$$

e) $2x - 1 = 3 \qquad / +1$
$2x = 4 \qquad / : 2$
$x = 2$

Pedagogická poznámka: Hodně často se v bodě c) objevuje (hlavně u žáků, kteří se vyhýbají zlomkům) úprava $x = 3 - \sqrt{2} : \sqrt{2}$. V takovém případě se vracíme na počátek: rovnice je rovnost dvou čísel, jaké číslo máme na pravé straně, ...

Pedagogická poznámka: U následujících příkladů je třeba dávat pozor, aby žáci nehádali výsledky, ale postupně se k nim dopracovávali.

Př. 6: Z rovnice $\pi - x = 4$ vyjádři neznámou *x*.

Teď už nebude stačit jediná úprava, budeme jich muset udělat postupně několik. Často budeme mít několik možností, jak postupovat.

$\pi - x = 4 \quad / - \pi$

$-x = 4 - \pi \quad / \cdot (-1)$

$x = -4 + \pi = \pi - 4$

$\pi - x = 4 \quad / + x$

$\pi = 4 + x \quad / - 4$

$\pi - 4 = x$

Př. 7: Ze vzorce pro hustotu $\rho = \frac{m}{V}$ vyjádři objem V.

$\rho = \frac{m}{V} \quad / \cdot V$ (nejdřív se snažíme „dostat *V* nahoru“)

$\rho \cdot V = \frac{m}{V} \cdot V$

$\rho \cdot V = m \quad / : \rho$

$\frac{\rho \cdot V}{\rho} = \frac{m}{\rho}$

$V = \frac{m}{\rho}$

Př. 8: Ze vztahu pro $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ vyjádři:

a) délku přepony *c*, b) délku odvěsny *a*.

a) délka přepony *c*

$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad / \cdot c$

$c \cdot \sin \alpha = a \quad / : \sin \alpha$

$c = \frac{a}{\sin \alpha}$

b) délka odvěsny *a*

$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad / \cdot c$

$c \cdot \sin \alpha = a$

Pedagogická poznámka: Bod b) jen prověřuje, zda žáci nečekají automaticky nějaký „těžší“ příklad.

Př. 9: Z rovnosti $\frac{115}{x} = \frac{35}{30}$ vyjádři neznámou *x*.

$\frac{115}{x} = \frac{35}{30} \quad / \cdot 30x$

$115 \cdot 30 = 35 \cdot x \qquad / :35$

$\frac{115 \cdot 30}{35} = x$

Pedagogická poznámka: Častější asi bude postupné násobení rovnice ve dvou krocích. Rozhodně nedoporučuji nutit žáky, aby proti své vůli násobili rovnici v jednom kroku, taková zběhlost přijde až časem.

Př. 10: Ze vzorce pro $v = v_0 + at$ vyjádři čas *t*.

$v = v_0 + at \qquad / -v_0$

$v - v_0 = at \qquad / :a$

$\frac{v - v_0}{a} = t$

Pedagogická poznámka: Opět levá strana je jedno číslo $\Rightarrow$ musíme ji vydělit celou.

Př. 11: Z Pythagorovy věty $c^2 = a^2 + b^2$ vyjádři délku odvěsny *a*.

$c^2 = a^2 + b^2 \qquad / -b^2$

$c^2 - b^2 = a^2 \qquad / \sqrt{\ }$

$\sqrt{c^2 - b^2} = a$

Př. 12: Z následujících rovnic vyjádři neznámou *x*.

a) $\frac{2x}{\sqrt{3}} = 4$ b) $2x - 2 = \sqrt{3}$ c) $x^2 + 2 = \sqrt{3}$

d) $2x^2 - 1 = \sqrt{3}$ e) $\frac{1,7}{x\sqrt{3}} = \frac{5,4 \cdot 3}{\sqrt{2}}$

a) $\frac{2x}{\sqrt{3}} = 4 \qquad / \cdot\sqrt{3}$

$2x = 4\sqrt{3} \qquad / :2$

$x = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$

b) $2x - 2 = \sqrt{3} \qquad / +2$

$2x = \sqrt{3} + 2 \qquad / :2$

$x = \frac{\sqrt{3} + 2}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

c) $x^2 + 2 = \sqrt{3} \qquad / -2$

$x^2 = \sqrt{3} - 2 \qquad / \sqrt{\ }$

$x = \sqrt{\sqrt{3} - 2}$

d) $2x^2 - 1 = \sqrt{3} \qquad / +1$

$2x^2 = \sqrt{3} + 1 \qquad / :2$

$x^2 = \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \qquad / \sqrt{\ }$

$x = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 1}{2}}$

e) $\frac{1,7}{x\sqrt{3}} = \frac{5,4 \cdot 3}{\sqrt{2}} \qquad / \cdot x\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}$

$1,7 \cdot \sqrt{2} = 5,4 \cdot 3 \cdot x\sqrt{3} \qquad / : \left(5,4 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\right)$

$\frac{1,7 \cdot \sqrt{2}}{5,4 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}} = x$

Př. 13: Ze vzorce pro $s = \frac{1}{2}at^2$ vyjádři:

a) zrychlení *a*, b) čas *t*.

a) zrychlení *a*

$s = \frac{1}{2}at^2 \qquad / \cdot 2$

$2s = at^2 \qquad / : t^2$

$\frac{2s}{t^2} = a$

b) čas *t*

$s = \frac{1}{2}at^2 \qquad / \cdot 2$

$2s = at^2 \qquad / : a$

$\frac{2s}{a} = t^2 \qquad / \sqrt{\ }$

$\sqrt{\frac{2s}{a}} = t$

Př. 14: Ze vzorce pro $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ vyjádři:

a) počáteční rychlost v_0, b) zrychlení *a*.

a) počáteční rychlost v_0

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad / -\frac{1}{2}at^2$

$s - \frac{1}{2}at^2 = v_0 t \qquad / : t$

$\frac{s - \frac{1}{2}at^2}{t} = \frac{2s - at^2}{2t} = v_0$

b) zrychlení *a*

$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad / -v_0 t$

$s - v_0 t = \frac{1}{2}at^2 \qquad / \cdot 2$

$2s - 2v_0 t = at^2 \qquad / : t^2$

$$\frac{2s-2v_0t}{t^2}=a$$

Př. 15: Ze soustavy rovnic $v=at$, $s=\frac{1}{2}at^2$ vyjádři:

a) dráhu *s* pomocí zrychlení *a* a rychlosti *v*,
b) zrychlení *a* pomocí dráhy *s* a rychlosti *v*.

a) dráhu *s* pomocí zrychlení *a* a rychlosti *v*
Ani jeden ze vzorců neobsahuje tři veličiny uvedené v zadání $\Rightarrow$ ze vzorce $v=at$ (je jednodušší) si vyjádříme *t* (ten ve výsledku být nemá $\Rightarrow$ potřebujeme se ho zbavit) a vyjádřený vzorec dosadíme do druhé rovnice.

$v=at \quad / : a$

$$t=\frac{v}{a}$$

Dosadíme do druhé rovnice: $s=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2=\frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2}=\frac{1}{2}\frac{v^2}{a}$.

$$s=\frac{v^2}{2a}$$

b) zrychlení *a* pomocí dráhy *s* a rychlosti *v*
Ani jeden ze vzorců neobsahuje tři veličiny uvedené v zadání $\Rightarrow$ ze vzorce $v=at$ (je jednodušší) si vyjádříme *t* (ten ve výsledku být nemá $\Rightarrow$ potřebujeme se ho zbavit) a vyjádřený vzorec dosadíme do druhé rovnice.

$v=at \quad / : a$

$$t=\frac{v}{a}$$

Dosadíme do druhé rovnice: $s=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}a\left(\frac{v}{a}\right)^2$.

$s=\frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2}=\frac{1}{2}\frac{v^2}{a}$ *a* můžeme zkrátit.

$s=\frac{v^2}{2a} \quad / \cdot a$

$as=\frac{v^2}{2} \quad / : s$

$$a=\frac{v^2}{2s}$$

Shrnutí: Při vyjadřování můžeme dělat ledacos, vždy však s oběma stranami to samé.